Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques, Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et aire d'une pièce de gare** (13 questions) — **Page 3**

2. **Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse** (13 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2018/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse et aire d'une pièce de gare

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise une vitesse instantanée de 400 km/h en moins de deux minutes, et la distance parcourue est modélisée par une fonction. L'exercice étudie cette fonction par équation différentielle et analyse, puis calcule l'aire d'une pièce de gare à partir de sa symétrie et de son contour.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' − 0,2y = 0.

L'équation s'écrit $y' = 0,2y$. La formule donnée pour $y' + ay = 0$ fournit $y(t) = Ce^{-at}$. Ici, $a = -0,2$, donc l'exponentielle est $e^{0,2t}$. La constante réelle C peut prendre toute valeur, y compris zéro. Ces fonctions sont définies et dérivables sur l'intervalle demandé $[0, +\infty[$, et constituent toutes les solutions de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que g(t) = −15t − 75 est une solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

$g(t) = -15t - 75$, donc $g'(t) = -15$.

On substitue ces expressions dans le membre de gauche : $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$. On retrouve exactement le second membre de l'équation différentielle. La fonction proposée vérifie donc l'équation sur $[0, 3]$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est une solution.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t.

Toutes les solutions de l'équation avec second membre s'obtiennent en ajoutant une solution de l'équation homogène à une solution particulière, ici $g(t) = -15t - 75$.

1. Solution particulière : $-15t - 75$.
2. Solution homogène : $Ce^{0,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

La somme de ces deux expressions donne l'ensemble recherché.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = -15t - 75 + Ce^{0,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle y' − 0,2y = 3t qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

Dans la famille de solutions, on impose la condition initiale en remplaçant t par zéro. On obtient $f(0) = -75 + C = 0$, donc $C = 75$. En reportant cette constante, on trouve $f(t) = -15t - 75 + 75e^{0,2t}$. Cette expression est équivalente à la forme utilisée dans la partie suivante. Elle vérifie bien $f(0) = 0$.

1. Constante : $C = 75$.
2. Fonction recherchée : $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression admise de f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le calcul formel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Résoudre $f'(t) \geq 0$ revient à résoudre $e^{0,2t} \geq 1$. Comme la fonction exponentielle est croissante et vaut 1 lorsque son exposant est nul, cette inégalité équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$.

- Sur $[0, 3]$, l'inégalité est vérifiée partout.
- Égalité en $t = 0$, stricte inégalité pour $t > 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

t	**0**	**3**
$f'(t)$	0	positif
$f(t)$	0	$75(e^{0,6} - 1) - 45 \approx 16,659$

La dérivée est nulle à l'origine et strictement positive sur $]0, 3]$. Ainsi, f augmente sur tout l'intervalle, de $f(0) = 0$ à $f(3) \approx 16,659$ km.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est croissante de 0 à environ $16,659$ sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième de kilomètre.

La distance au bout d'une minute se calcule en évaluant la fonction donnée en $t = 1$: $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. L'évaluation donne environ $1,6052$ km. Comme l'énoncé demande un arrondi au dixième, on conserve un chiffre après la virgule.

> $1,6052$ km s'arrondit à $1,6$ km.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Distance parcourue : $1,6$ km.

Question 3° a). En utilisant f'(t) comme expression de la vitesse en kilomètre par minute, déterminer la vitesse du wagon à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

1. La vitesse en km/min est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$.
2. À deux minutes : $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,377$ km/min.
3. Arrondie au dixième, cette vitesse vaut $7,4$ km/min. En la multipliant par 60, on obtient environ $442,6$ km/h.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 2 minutes : $7,4$ km/min, soit $442,6$ km/h.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs, qui est d'atteindre 400 km/h en moins de deux minutes, est atteint et justifier la réponse.

La vitesse est croissante puisque sa dérivée, $f''(t) = 3e^{0,2t}$, est positive. Le seuil de 400 km/h correspond à $400/60$ km/min. On résout donc $15(e^{0,2t} - 1) = 400/60$, d'où $t = 5\ln(13/9) \approx 1,839$ minute.

- Ce temps est inférieur à deux minutes.
- L'objectif des ingénieurs est donc atteint.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de 400 km/h est atteint après environ $1,839$ minute.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Recopier la réponse choisie sans justification.

> La tangente en $t = 2$ s'écrit $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$.

En remplaçant par les expressions de la fonction et de sa dérivée, puis en développant, on obtient $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$. C'est la troisième proposition de l'énoncé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir l'aire du rectangle OPQR parmi les trois valeurs proposées, en unité d'aire. Le dessin est donné dans un repère orthonormé où une unité graphique représente un mètre.

Dimension du rectangle OPQR	Valeur
Largeur OP	3 m
Hauteur OR	$2,25$ m
Aire A_1	$3 \times 2,25 = 6,75$ u. a.

Le rectangle s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, et son bord supérieur est la droite $y = 2,25$. Son aire correspond donc à la troisième valeur proposée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe de g(x) = 27x/(2x² + 18), l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3, en exploitant la primitive fournie.

La primitive fournie est $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2 + 9) + c_1$. Comme $g(x)$ est positive sur $[0, 3]$, l'aire sous sa courbe est son intégrale sur cet intervalle.

1. $A_2 = G(3) - G(0)$.
2. $A_2 = \frac{27}{4}[\ln(18) - \ln(9)] = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. À partir des aires déterminées précédemment et de la symétrie de la pièce par rapport à l'axe des ordonnées, calculer l'aire hachurée A et arrondir au millième.

Sur la moitié droite, l'aire hachurée est l'aire du rectangle moins l'aire sous la courbe, soit $A_1 - A_2$. La symétrie par rapport à l'axe des ordonnées donne la même aire à gauche.

1. $A = 2(A_1 - A_2)$.
2. $A = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right) \approx 4,143$ u. a.

L'unité graphique étant le mètre sur chaque axe, l'aire s'exprime en m^2.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143\ \mathrm{m}^2$.

2. Obsolescence programmée des smartphones : probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse

L'exercice étudie l'obsolescence technique et logicielle des smartphones à partir de données relevées sur une population, puis modélise les pannes non réparables dans un lot de modèles A. Il se termine par un test bilatéral visant à vérifier la proportion de personnes qui estiment que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les 200 smartphones, compléter le tableau d'effectifs croisant l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle, avec les totaux.

Sur 200 smartphones, 3 % sont touchés par l'obsolescence technique, soit 6, et 8 % par l'obsolescence logicielle, soit 16. Parmi ces 16, 12,5 % sont aussi touchés par l'obsolescence technique, soit 2. Les autres cases se complètent par différence.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Cases intérieures, dans l'ordre : 2, 4, 14 et 180.

Question 2°. Donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique, L l'obsolescence logicielle et P_L(T) la probabilité de T sachant L.

Les deux probabilités simples correspondent aux pourcentages de l'énoncé. La troisième est conditionnelle : elle concerne seulement les smartphones touchés par l'obsolescence logicielle.

$$P(T) = 0,03,\ P(L) = 0,08 \text{ et } P_L(T) = 0,125.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0,03,\ P(L) = 0,08$ et $P_L(T) = 0,125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché à la fois par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle.

La probabilité de l'intersection se calcule à partir de la probabilité conditionnelle donnée et de la probabilité de L :

$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0,08 \times 0,125 = 0,01.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T \cap L) = 0,010.$

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Pour l'événement « au moins l'un des deux types d'obsolescence », on additionne les probabilités de T et de L, puis on retranche leur intersection pour ne pas la compter deux fois.

```
P(T ∪ L) = P(T) + P(L) - P(T ∩ L)
         = 0,03 + 0,08 - 0,01
         = 0,10
```

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0,100.$

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

On cherche la proportion de smartphones touchés par l'obsolescence logicielle parmi ceux touchés par l'obsolescence technique. On divise donc la probabilité de l'intersection par celle de T.

$$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0,01}{0,03} \approx 0,333.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) \approx 0,333.$

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50, suit une loi binomiale et déterminer ses paramètres.

Chaque tirage a deux issues et la probabilité d'obtenir un smartphone non réparable reste égale à 0,045. Les tirages sont assimilés à des tirages avec remise, donc ils sont indépendants. Le nombre X de smartphones non réparables parmi 50 suit ainsi une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,045$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0,045).$

Question 2°. Calculer la probabilité que les 50 smartphones prélevés dans le lot soient tous réparables.

Tous les smartphones sont réparables lorsque $X = 0$. La probabilité qu'un smartphone soit réparable vaut $1 - 0,045 = 0,955$. Par indépendance des 50 prélèvements :

1. $P(X = 0) = 0,955^{50}$;
2. à 10^{-3} près, cette probabilité vaut $0,100$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Probabilité que les 50 smartphones soient réparables : $0,100$.

Question 3° a). Exécuter à la main l'algorithme fourni et compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme cumulée S pour i allant de 0 à 3.

À chaque étape, l'algorithme ajoute $P(X = i)$ à la somme précédente. Les probabilités et sommes du tableau sont arrondies au millième.

Valeur	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Probabilités : 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes cumulées : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte du nombre de smartphones non réparables.

La somme finale additionne les probabilités pour $X = 0, 1, 2, 3$. Elle représente donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

- Valeur finale : $S \approx 0,813$.
- Environ 81,3 % des lots contiennent au plus trois smartphones non réparables.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$S \approx 0,813$, soit environ 81,3 % des lots avec au plus trois smartphones non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter cette valeur pour un lot de 50 smartphones.

Pour une loi binomiale, l'espérance est le produit des paramètres n et p :

$E(X) = 50 \times 0,045 = 2,25$.

Un lot contient donc en moyenne 2,25 smartphones non réparables.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$E(X) = 2,25$ smartphones non réparables par lot en moyenne.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que sous H_0 la probabilité que F appartienne à l'intervalle [0,55 − h ; 0,55 + h] soit égale à 0,95. Trois valeurs sont proposées.

Sous H_0, l'intervalle centré sur 0,55 contient 95 % des valeurs. Pour une loi normale, la marge vaut environ 1,96 écart type :

$h \approx 1,96 \times 0,037 = 0,07252$, soit 0,07 au centième.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Choix : $h \approx 0,07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 % pour les hypothèses H_0 : p = 0,55 et H_1 : p ≠ 0,55.

La règle de décision au seuil de 5 % utilise l'intervalle centré sur 0,55 avec la marge arrondie $h = 0,07$.

1. Si la fréquence observée appartient à $[0,48\,;\,0,62]$, on ne rejette pas H_0.

2. Si elle est en dehors de cet intervalle, on rejette H_0 au profit de H_1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 pour une fréquence dans $[0,48\,;\,0,62]$; la rejeter sinon.

Question 3°. À partir des réponses de 76 personnes sur 180, conclure le test d'hypothèse sur la proportion de personnes estimant que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

La fréquence observée est $\frac{76}{180} \approx 0,422$. Elle est inférieure à la borne basse 0,48 de l'intervalle de décision. Elle se situe donc dans la région de rejet du test bilatéral.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> On rejette H_0 au seuil de 5 % ; l'échantillon indique une proportion inférieure à 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, dure deux heures et son coefficient dépend de la spécialité. Elle étudie le départ d'un train à très haute vitesse et l'aire d'une pièce de gare, puis l'obsolescence des smartphones. Les compétences évaluées couvrent les équations différentielles, l'analyse, le calcul intégral, les probabilités conditionnelles, la loi binomiale et le test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' − 0,2y = 3t, une solution particulière est −15t − 75 et les solutions de l'équation homogène sont k e^(0,2t).
- La vitesse instantanée est la dérivée de la distance : si f est en km et t en minutes, f'(t) est en km/min.
- Pour une loi binomiale X de paramètres n et p, P(X = i) = C(n,i)p^i(1 − p)^(n − i) et E(X) = np.
- Dans un test bilatéral à 5 %, l'intervalle d'acceptation centré sur p_0 est choisi pour contenir 95 % des fréquences sous H_0.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités de temps et de vitesse : convertir les km/min en km/h avant de comparer à 400 km/h.
- Pour les probabilités conditionnelles, identifier clairement l'événement au dénominateur et distinguer intersection et union.
- Dans l'algorithme, mettre à jour S après chaque valeur de i et interpréter la somme des probabilités de X = 0 à 3.
- Pour le test, calculer la fréquence observée puis la comparer aux bornes de décision avant de conclure dans le contexte.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment passer de la vitesse calculée en km/min à une vitesse en km/h ?

Une heure contient 60 minutes : multipliez la vitesse en km/min par 60 pour l'exprimer en km/h. Comparez ensuite cette valeur à l'objectif de 400 km/h.

Q : Comment trouver l'intersection et l'union de deux événements à partir d'une probabilité conditionnelle ?

Utilisez P(T ∩ L) = P(L)P_L(T). Puis appliquez P(T ∪ L) = P(T) + P(L) − P(T ∩ L), en vérifiant que les événements et probabilités conditionnelles sont bien identifiés.

Q : Comment interpréter la somme calculée par l'algorithme de la partie binomiale ?

L'algorithme additionne P(X = i) pour i de 0 à 3. Sa valeur finale représente donc la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

Q : Quelle règle appliquer pour conclure le test bilatéral de la dernière partie ?

Sous l'hypothèse nulle, la fréquence observée doit rester dans l'intervalle d'acceptation centré sur 0,55. Si elle en sort, on rejette H_0 au seuil de 5 % ; sinon, on ne la rejette pas.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2018/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Économique de la Construction : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.