Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MEC

Épreuve de mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2022/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction du temps. Les questions portent sur une équation différentielle, l'étude de la fonction, la distance parcourue, un développement limité et une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y' + 0,8y = 0.

L'équation est de la forme $y' + ay = 0$, avec $a = 0,8$. D'après la formule fournie dans le sujet, ses solutions sur l'intervalle considéré sont les fonctions exponentielles $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. En remplaçant a par $0,8$, on obtient toutes les solutions de (E_0). Aucune condition initiale n'est imposée à cette question : la constante reste donc arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. La fonction g est définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En substituant g et sa dérivée dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Le membre de gauche est donc égal au membre de droite pour tout $t \geq 0$. Cela vérifie que g est bien une solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g'(t) + 0,8g(t) = 4$: $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). La différence entre deux solutions de (E) vérifie l'équation homogène associée (E_0), dont les solutions sont $ke^{-0,8t}$. On obtient donc toutes les solutions de (E) en ajoutant à la solution particulière une solution de (E_0). La constante k parcourt l'ensemble des réels.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

D'après la question précédente, la solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale donne $f(0) = 5 + ke^0 = 20$. Comme $e^0 = 1$, on résout $5 + k = 20$, d'où $k = 15$. Cette valeur détermine la solution qui modélise la vitesse du chariot au cours du freinage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On utilise l'expression obtenue pour la vitesse : $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Quand t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t}$ tend vers 0. Le produit $15e^{-0,8t}$ tend aussi vers 0. Par somme, $f(t)$ tend vers $0 + 5$, ce qui établit la limite demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

Une courbe représentative d'une fonction admet une asymptote horizontale lorsque la fonction tend vers une limite finie à l'infini. Ici, la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ vaut 5. La droite horizontale d'ordonnée 5 est donc l'asymptote à la courbe C en $+\infty$. Son équation s'écrit simplement $y = 5$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $y = 5$.

Question 2. En utilisant f'(t) = −12e^(−0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$ sur l'intervalle : f y est strictement décroissante. À la borne gauche, $f(0) = 20$, et en $+\infty$, $f(t)$ tend vers 5. Le tableau indique le signe de la dérivée et la variation de f.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	$-$
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout temps fini $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Donc $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$, et en particulier $f(t) > 0$. La vitesse diminue et tend vers 5, mais elle ne s'annule jamais dans ce modèle. Le système ne permet donc pas au chariot de s'arrêter.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : la vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et ne s'annule pas.

Question 4. a. La fonction F est définie sur [0 ; +∞[par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t. Vérifier que F est une primitive de f sur cet intervalle.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle, la dérivée du premier terme est $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$, et celle de $5t$ est 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$. La dérivée de F étant f, F est une primitive de f sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4. b. À l'aide de la formule d = ∫ de t₀ à t₁ f(t)dt, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance est l'intégrale de la vitesse entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. On obtient $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette expression est la valeur exacte. Son approximation est $15,3250819$ m, soit, au centimètre près, $15,33$ m.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, l'unique expression du développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Recopier la réponse choisie sans justification.

Le logiciel donne le terme polynomial $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Comme $\frac{24}{5} = 4,8$, l'expression correspondante parmi les propositions est celle qui s'écrit $20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t)$ qui tend vers 0 lorsque t tend vers 0. C'est la troisième proposition. La question demandant de recopier la réponse exacte, on retient cette forme avec son reste.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. D'après l'énoncé, $f(0) = 20$ et $f'(t) = -12e^{-0,8t}$. Ainsi, $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient une droite passant par le point $(0; 20)$, de coefficient directeur -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance

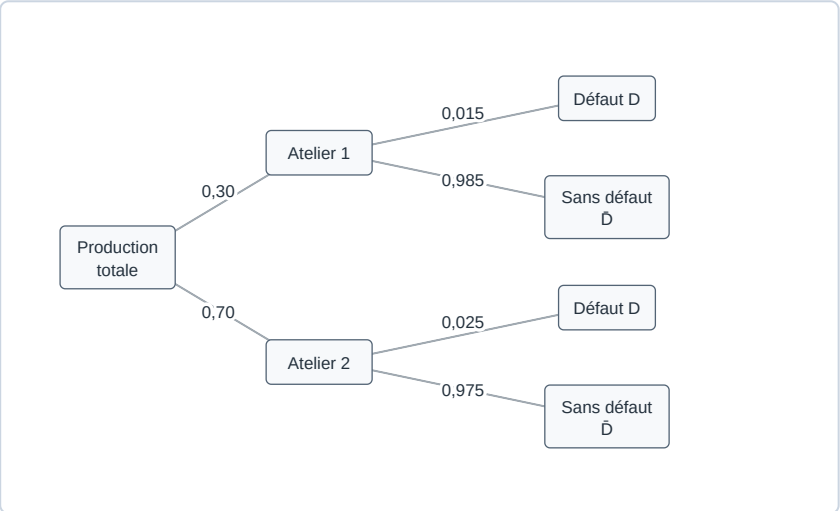
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers et étudie les défauts ainsi que la durée de bon fonctionnement des tubes. Un échantillon de rivets utilisés pour leur fixation sert ensuite à estimer la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la production des deux ateliers et les probabilités qu'un tube présente ou non un défaut.

L'arbre se construit en deux étapes : d'abord l'atelier d'origine, puis la présence ou non d'un défaut. Les probabilités des ateliers sont les proportions de production. Pour chaque atelier, la probabilité « sans défaut » est le complément de la probabilité « défaut » : on obtient 0,985 pour l'atelier 1 et 0,975 pour l'atelier 2. Les probabilités portées sur les branches issues d'un même nœud ont une somme égale à 1.

Production et défauts des tubes



Probabilités de production et probabilités conditionnelles de défaut ou d'absence de défaut.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Atelier 1 : 0,30, puis défaut 0,015 ou sans défaut 0,985. Atelier 2 : 0,70, puis défaut 0,025 ou sans défaut 0,975.

Question 2. Calculer la probabilité P(A₁ ∩ D), où A₁ désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

La probabilité que le tube provienne de l'atelier 1 et présente un défaut correspond au chemin « atelier 1, puis défaut ». On multiplie donc la proportion de production de cet atelier par sa probabilité conditionnelle de défaut. Avec les données de l'énoncé :

$$P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045.$$

Cette probabilité est rapportée à la production totale de l'usine.

Probabilité du chemin atelier 1 puis défaut

Événement	Probabilité
Atelier 1	0,30
Défaut sachant atelier 1	0,015
Atelier 1 et défaut	0,0045

La probabilité conjointe est le produit des probabilités le long du chemin.

✓ RÉPONSE À RETENIR

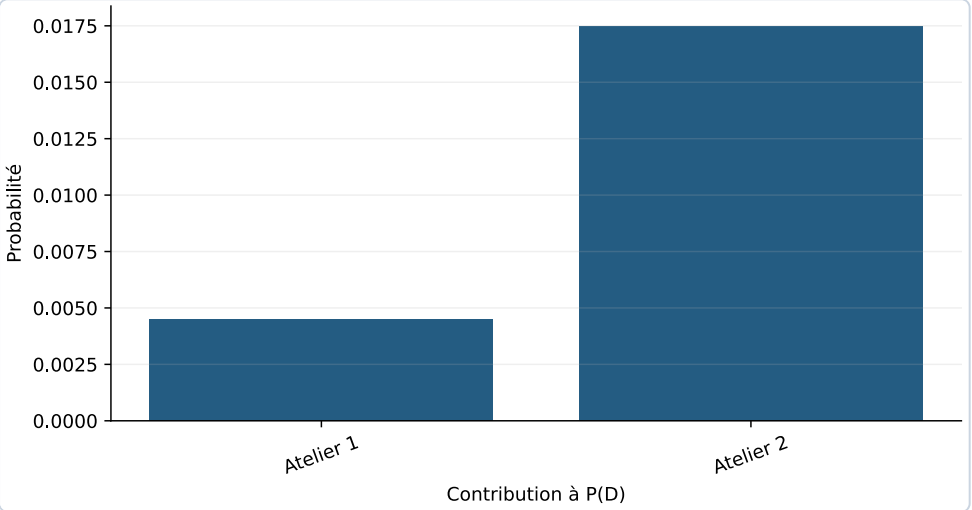
$P(A_1 \cap D) = 0,0045$, soit 0,45 % de la production totale de l'usine.

Question 3. Calculer la probabilité P(D) à partir des probabilités de production et de défaut données pour les deux ateliers.

Un tube défectueux provient nécessairement de l'un des deux ateliers. Les événements « atelier 1 et défaut » et « atelier 2 et défaut » sont incompatibles : leurs probabilités s'additionnent pour donner la probabilité totale d'un défaut.

Origine	Calcul du chemin	Contribution
Atelier 1	0,30 × 0,015	0,0045
Atelier 2	0,70 × 0,025	0,0175

La somme des deux contributions donne la probabilité recherchée.



✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0,0045 + 0,0175 = 0,022$, soit 2,2 % de tubes défectueux.

Question 4. Sachant que le tube ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche la proportion de tubes issus de l'atelier 2 parmi tous les tubes sans défaut. Le numérateur est la probabilité du chemin « atelier 2, puis sans défaut » ; le dénominateur est la probabilité totale d'obtenir un tube sans défaut.

- $P(A_2 \cap \overline{D}) = 0,70 \times 0,975 = 0,6825$.
- $P(\overline{D}) = 1 - 0,022 = 0,978$.
- Donc $P(A_2 \mid \overline{D}) = 0,6825 / 0,978 \approx 0,698$.

La probabilité demandée est ainsi proche de 70 %.

Atelier d'origine sachant que le tube est sans défaut

Grandeur	Valeur
Atelier 2 et sans défaut	0,6825
Sans défaut au total	0,978
Probabilité conditionnelle	0,698 environ

La probabilité conditionnelle est le quotient de la première valeur par la deuxième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2 \mid \overline{D}) \approx 0,698$, soit environ 69,8 % des tubes sans défaut.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,001. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la formule fournie donne $E(T) = 1/\lambda$. En remplaçant λ par 0,001, on obtient $E(T) = 1/0,001 = 1\,000$ heures. L'espérance représente la durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube selon ce modèle. Elle ne signifie pas que chaque tube fonctionne exactement 1 000 heures : les durées observées peuvent être plus courtes ou plus longues.

Espérance de la durée de bon fonctionnement

Paramètre exponentiel	Calcul	Espérance
λ = 0,001	1 ÷ 0,001	1 000 heures

Application de la formule de l'énoncé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

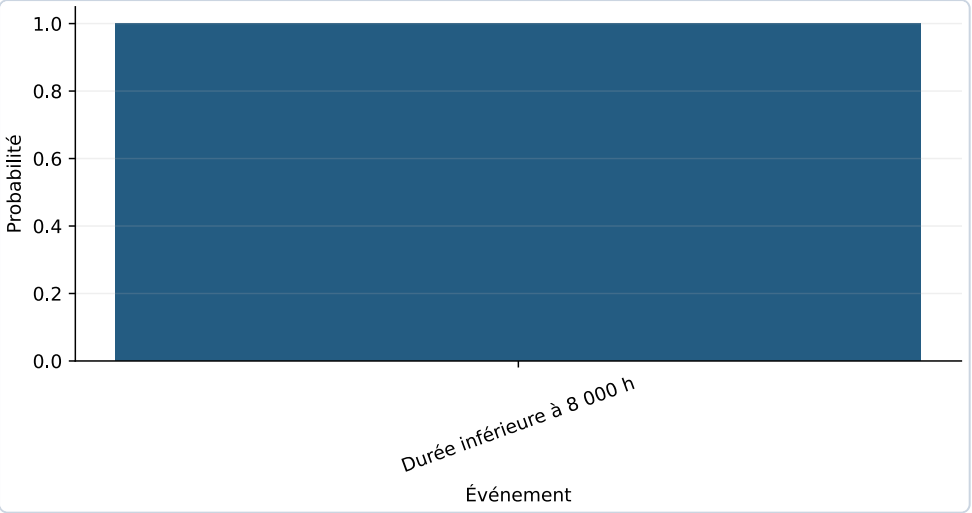
$E(T) = 1\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube selon le modèle exponentiel.

Question 2. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Pour une durée de 8 000 heures, on remplace t par 8 000 et λ par 0,001 :

1. $P(T \leq 8000) = 1 - e^{-0{,}001 \times 8000}$.
2. La valeur est environ 0,99966.
3. Arrondie au centième, elle vaut 1,00.

Comme la durée suit une loi continue, la probabilité d'avoir une durée strictement inférieure à 8 000 heures est identique.

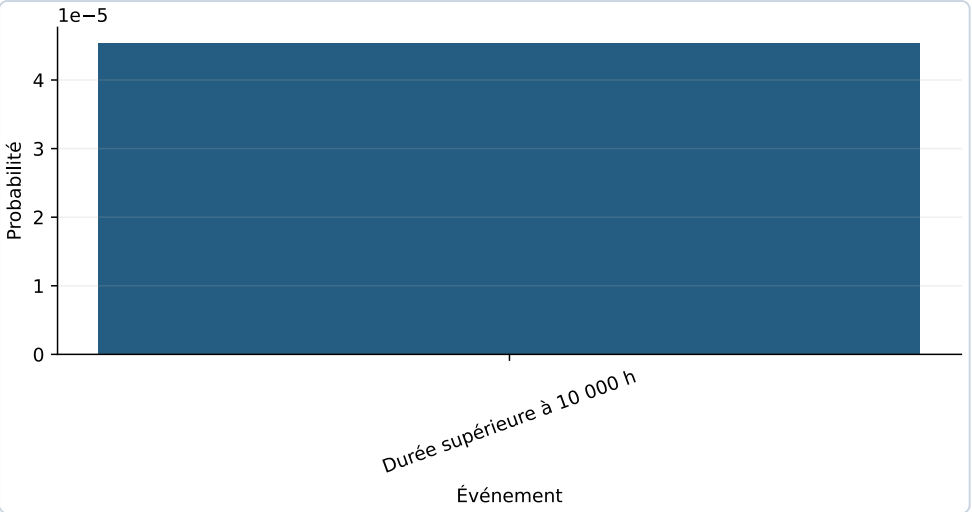


✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 1{,}00$ au centième, soit une probabilité très proche de 1.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser une durée t est le complément de la probabilité d'avoir terminé avant cette durée. Pour la loi exponentielle, cela donne directement $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Ainsi, pour 10 000 heures, $P(T > 10000) = e^{-0{,}001 \times 10000} = e^{-10} \approx 0{,}0000454$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 0,00 ; elle reste toutefois positive avant arrondi.



✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0,00$ au centième ; la valeur non arrondie est environ 0,0000454.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue de rivets conformes est la fréquence observée dans l'échantillon. On divise donc le nombre de rivets conformes par le nombre total de rivets prélevés : $\hat{p} = 975/1000 = 0,975$. Cette fréquence est l'estimation ponctuelle de la proportion dans l'ensemble de la production. Elle correspond à 97,5 % des rivets contrôlés conformes.

Fréquence observée des rivets conformes

Rivets conformes	Effectif de l'échantillon	Fréquence
975	1 000	0,975

La fréquence observée fournit l'estimation ponctuelle de p.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\hat{p} = 0,975$, soit une estimation ponctuelle de 97,5 % de rivets conformes.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur la fréquence observée pour la proportion p, au niveau de confiance de 95 %. Arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La formule de l'énoncé utilise la fréquence observée $f = 0,975$ et l'effectif $n = 1000$. La marge d'erreur vaut

$$1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1000}} \approx 0,009677.$$

L'intervalle centré sur f est donc $[0,975 - 0,009677\ ;\ 0,975 + 0,009677]$. On arrondit chacune des deux bornes à 10^{-3} près.

Intervalle de confiance centré sur la fréquence observée

Borne	Valeur arrondie à 10^{-3}
Inférieure	0,965
Supérieure	0,985

Calcul avec f = 0,975, n = 1 000 et le coefficient 1,96.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0,965\ ;\ 0,985]$, bornes arrondies au millième.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB1 et dure deux heures. Le coefficient est 2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux où il est 3. Les deux exercices étudient le freinage d'un chariot et le contrôle de tubes fluorescents et de rivets. Ils évaluent équations différentielles, analyse de fonctions, probabilités et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, la solution générale s'obtient en ajoutant une solution particulière aux solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L lorsque t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, E(T) = 1/λ et P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt).
- L'intervalle de confiance fourni est f ± 1,96√(f(1−f)/n), où f est la fréquence observée et n la taille de l'échantillon.

Points de vigilance & attentes du jury

- Appliquer la condition initiale après avoir établi la forme générale des solutions de l'équation différentielle.
- Pour le freinage, interpréter la limite de la vitesse et relier son signe aux variations de la fonction.
- Dans l'arbre, distinguer les proportions produites par atelier des probabilités conditionnelles de défaut.
- Respecter les unités et les précisions demandées : distance au centimètre, probabilités à 10^{-2} et bornes à 10^{-3} près.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue par le chariot entre deux instants ?

La distance est l'intégrale de la vitesse sur l'intervalle considéré. Avec une primitive F de f, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on exprime le résultat en mètres et on respecte l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer les probabilités liées à la durée de vie exponentielle ?

Pour une durée T de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 − e^(−λt) et P(T > t) = e^(−λt). L'espérance vaut 1/λ et s'exprime dans la même unité que la durée.

Q : Comment répartir son temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et leurs parties peuvent être traitées indépendamment. Répartissez le temps entre les exercices, avancez sur toutes les parties et gardez quelques minutes pour vérifier calculs, unités et arrondis.

Q : Quelles règles de présentation et quels outils sont attendus dans ce sujet ?

Présentez les étapes utiles, indiquez les formules employées et concluez dans le contexte. Respectez les notations, les unités et les arrondis; l'usage d'une calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2022/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Économique de la Construction : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.