Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MEC

# Mathématiques, BTS Groupement D1

**Session 2022** • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

## Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

**1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical** (13 questions) **Page 3**

**2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller** (9 questions) **Page 7**

**3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

**Sujet officiel (PDF) :** https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2022/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

# 1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical

Dans un pays de 60 millions d'habitants, on étudie l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical à partir de données annuelles depuis 2013. Deux modèles sont examinés : un ajustement exponentiel et une fonction définie à l'aide d'une équation différentielle.

## Partie A

**Question 1. Compléter le tableau fourni en annexe en calculant les valeurs de y = ln(N - 30), arrondies au millième.**

| Année | 2013 | 2014 | 2015 | 2016 | 2017 | 2018 | 2019 | 2020 | 2021 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \ln(N - 30)$ | 3,268 | 3,336 | 3,418 | 3,497 | 3,578 | 3,656 | 3,738 | 3,818 | 3,898 |

Pour chaque valeur de $N$, on calcule $\ln(N - 30)$, avec $N$ en milliers, puis on arrondit au millième. Par exemple, en 2013 : $\ln(56,25 - 30) \approx 3,268$.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

2013 à 2021 : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

**Question 2.a. À l'aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b. Arrondir a et b au centième.**

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$, pour $k = 0$ à $8$, donne une pente d'environ $0,0794$ et une ordonnée à l'origine d'environ $3,2609$. L'arrondi au centième s'applique séparément à chacun des deux coefficients.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

$y = 0,08k + 3,26$.

**Question 2.b. À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées de l'implant, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).**

> $\ln(N - 30) = 0,08k + 3,26$, donc $N - 30 = e^{3,26}e^{0,08k}$. Comme $e^{3,26} \approx 26,05$, on retrouve le modèle demandé, avec $N$ exprimé en milliers.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

$N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$ milliers.

**Question 3.a.** **En supposant que le modèle proposé reste valide, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de l'année 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,701$ milliers. Comme le résultat est en milliers, l'arrondi au millier de personnes revient à arrondir cette valeur à l'unité.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 104 000 personnes.

**Question 3.b.** **Si le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, indiquer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Lorsque $k \to +\infty$, $e^{0,08k} \to +\infty$, donc $N(k) \to +\infty$. Or la population du pays reste limitée à 60 millions d'habitants. Le modèle finit donc par prévoir davantage de personnes équipées que d'habitants : il ne peut pas rester valide à long terme.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle prévoit une croissance sans limite, incompatible avec une population stable de 60 millions.

## Partie B

**Question 1.a.** **Résoudre sur [0 ; +∞[ l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,05y = 0.**

L'équation homogène devient $y' = -0,05y$. Ses solutions sur $[0;+\infty[$ sont les fonctions exponentielles de taux $-0,05$, avec une constante réelle arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 1.b.** **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y = c$, on a $y' = 0$. L'équation impose alors $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

**Question 1.c.** **Résoudre sur [0 ; +∞[ l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

1. Une solution particulière de $(E)$ est la solution constante $y = 1$.
2. On ajoute à cette solution générale toute solution de l'équation homogène, soit $Ce^{-0,05t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

**Question 1.d.** **Sachant que g(0) = 8, en déduire une expression de g sur [0 ; +∞[.**

Dans la solution générale, la condition initiale donne $g(0) = 1 + C = 8$, car $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 7$, que l'on substitue dans l'expression générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

**Question 2.** **Selon le modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), où t est le nombre d'années depuis 2013 et f(t) le nombre de personnes équipées exprimé en milliers, déterminer au millier près le nombre de personnes équipées en 2026.**

Pour 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Alors $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,684$ milliers de personnes. L'arrondi demandé se fait au millier de personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 97 000 personnes.

**Question 3.** **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Le dénominateur $1 + 7e^{-0,05t}$ tend donc vers 1, tandis que le numérateur reste égal à 450. La fonction étant exprimée en milliers de personnes, la limite s'interprète en milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

**Question 4. À partir de l'expression de f'(t) fournie, déduire le sens de variation de f sur [0 ; +∞[ et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.**

Pour tout $t \geq 0$, l'expression donnée $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$ est strictement positive : l'exponentielle et le dénominateur sont positifs. Ainsi, $f$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Le modèle prévoit une augmentation continue du nombre de personnes équipées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f$ est strictement croissante : le nombre de personnes équipées augmente selon le modèle.

**Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.**

On résout $f(t) > 120$. Le dénominateur étant positif, cela équivaut à $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, puis à $t > -20\ln\left(\dfrac{11}{28}\right) \approx 18,69$. Le premier rang entier qui satisfait cette inégalité est donc $t = 19$, soit l'année $2013 + 19$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À partir de 2032.

## 2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et le contrôle statistique du volume d'eau distribué.

### Partie A - Défaut d'approvisionnement

**Question 1. Associer chacune des quatre phrases du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite, en indiquant sur la copie le numéro de la phrase et la lettre associée. Les événements indépendants A et B désignent respectivement le fait que la file d'entrée est vide au moins une fois et que le réservoir est vide au moins une fois dans la journée ; P(A) = 0,03 et P(B) = 0,02. Les phrases concernent le complément de A, l'événement A sans B, la probabilité de A et B simultanément et la probabilité d'un défaut d'approvisionnement. Aucune justification n'est demandée.**

| Phrase | Information associée |
|---|---|
| 1. La file ne se vide pas | E : $P(\bar{A}) = 0,97$ |
| 2. A, mais pas B | C : $A \cap \bar{B}$ |
| 3. A et B simultanément | F : $P(A \cap B) = 0,0006$ |
| 4. Défaut d'approvisionnement | D : $P(A \cup B) = 0,049$ |

La phrase 1 concerne le complément de A. La phrase 2 décrit A sans B. Pour la phrase 3, l'indépendance donne $P(A \cap B) = 0,03 \times 0,02$. Enfin, le défaut correspond à $A \cup B$ : sa probabilité vaut $0,03 + 0,02 - 0,0006 = 0,0494$, affichée 0,049 dans le tableau.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

### Partie B - Pannes de la machine sur 200 jours

**Question 1. La probabilité que la machine tombe en panne un jour donné est 0,025 et les pannes sur les différents jours sont indépendantes. Pour X, le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours consécutifs, donner sans justification la loi de probabilité suivie par X et préciser ses paramètres.**

Sur chaque journée, il y a deux issues : la machine tombe en panne, avec une probabilité de 0,025, ou elle ne tombe pas en panne. Les 200 journées sont indépendantes et la probabilité de panne reste la même. Ainsi, X compte les succès de 200 épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes. C'est donc une variable aléatoire binomiale, de paramètres le nombre de journées et la probabilité d'une panne quotidienne.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale B(200 ; 0,025).

**Question 2.a.** **La loi de X est approchée par une loi de Poisson de paramètre λ. Justifier que λ = 5.**

L'approximation par une loi de Poisson utilise comme paramètre l'espérance de la loi binomiale. Ici, cette espérance est le produit du nombre de journées observées par la probabilité quotidienne de panne.

1. Nombre de journées : 200.
2. Probabilité de panne par journée : 0,025.
3. Donc λ = 200 × 0,025 = 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> λ = 5.

**Question 2.b.** **Pour une variable aléatoire Y suivant une loi de Poisson de paramètre 5, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à $10^{-3}$.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, la probabilité cumulée jusqu'à 10 s'obtient en additionnant les probabilités de k = 0 à k = 10. La formule de la loi donne :

$$P(Y \leq 10) = e^{-5} \sum_{k=0}^{10} 5^k/k! \approx 0{,}9863047.$$

En arrondissant au millième, on obtient la valeur demandée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(Y ≤ 10) ≈ 0,986.

**Question 2.c.** **Le graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule fournie pour P(Y = k), indiquer si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

En remplaçant k par 15 dans la formule donnée, on obtient :

$$P(Y = 15) = 5^{15}e^{-5}/(1 \times 2 \times \ldots \times 15) \approx 0{,}000157.$$

Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc cette probabilité est strictement positive. Le graphique ne permet simplement pas de distinguer une valeur aussi petite de zéro à l'échelle représentée. La conjecture n'est donc pas vraie.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Conjecture fausse : P(Y = 15) ≈ 0,000157 > 0.

## Partie C - Qualité de l'embouteillement

**Question 1. À partir du tableau des volumes et de leurs effectifs pour l'échantillon de 100 bouteilles, déterminer à l'aide de la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type $\sigma$ de l'échantillon. Arrondir l'écart type à $10^{-2}$.**

| Volume (cL) | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 |
|---|---|---|---|---|---|
| Effectif | 17 | 20 | 43 | 13 | 7 |

La moyenne pondérée vaut $(73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7)/100 = 74{,}73$ cL. L'écart type de la série, calculé à partir de la moyenne des carrés des écarts à cette moyenne, vaut $\sqrt{1{,}2171} \approx 1{,}1032$ cL. Arrondi au centième, il est égal à 1,10 cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\bar{x} = 74{,}73$ cL ; $\sigma \approx 1{,}10$ cL.

**Question 2.a. Pour le test bilatéral $H_0 : m = 75$ contre $H_1 : m \neq 75$ au seuil de confiance de 95 %, la moyenne Z d'un échantillon de 100 bouteilles suit, sous $H_0$, une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. Déterminer h tel que $P(75 - h \leq Z \leq 75 + h) \approx 0{,}95$, à $10^{-2}$ près.**

Sous l'hypothèse $H_0$, Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs correspond à l'intervalle centré réduit entre −1,96 et 1,96. Sa demi-largeur dans l'unité des volumes est donc $h = 1{,}96 \times 0{,}11 = 0{,}2156$ cL. Arrondie au centième, elle vaut 0,22 cL.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}22$ cL.

**Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % à partir de la valeur h déterminée.**

On compare la moyenne observée à l'intervalle central sous $H_0$. Avec la demi-largeur arrondie h = 0,22 cL, les bornes sont 75 − 0,22 et 75 + 0,22.

1. Si la moyenne de l'échantillon appartient à [74,78 ; 75,22] cL, on ne rejette pas $H_0$.
2. Si elle est hors de cet intervalle, on rejette $H_0$ au seuil de 5 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter $H_0$ si $\bar{x} \in [74{,}78 ; 75{,}22]$ cL ; la rejeter sinon.

**Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, indiquer si l'hypothèse $H_0$ : m = 75 peut être acceptée.**

La moyenne observée dans l'échantillon est de 74,73 cL. D'après la règle du test, on ne rejette pas $H_0$ lorsque cette moyenne appartient à l'intervalle [74,78 ; 75,22] cL. Or la moyenne observée est inférieure à la borne basse. Elle se situe donc dans la région de rejet du test bilatéral au seuil de 5 %.

**✓ RÉPONSE À RETENIR**

Non : on rejette $H_0$, car la moyenne observée est hors de l'intervalle d'acceptation.

# Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

**Bilan de l'épreuve :** Épreuve de mathématiques du BTS Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de 2 heures. Le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices étudient la modélisation du nombre de personnes équipées d'un implant médical et une machine à embouteiller, au moyen d'ajustements, d'équations différentielles, de probabilités, de lois de Poisson et d'un test statistique de conformité.

### Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement y = ln(N - 30) transforme le modèle exponentiel en un ajustement affine entre y et le rang k.
- Pour y' + ay = c, la solution générale est la somme d'une solution particulière constante et de la solution de l'équation homogène.
- Pour deux événements indépendants A et B, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
- Pour une loi de Poisson de paramètre λ, P(Y = k) = e^(-λ)λ^k/k! et cette probabilité est positive pour tout entier k.

### Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités et distinguer les milliers de personnes du nombre de personnes.
- Pour les prévisions, convertir correctement l'année en rang ou en temps écoulé depuis 2013.
- Dans le test bilatéral, comparer la moyenne observée à l'intervalle d'acceptation centré sur la valeur de $H_0$.
- Utiliser les effectifs du tableau pour calculer la moyenne et l'écart type, puis appliquer les arrondis demandés.

## Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

**Q : Comment retrouver le modèle exponentiel après le changement de variable ?**

On ajuste une droite y = ak + b aux données transformées y = ln(N - 30). On revient ensuite à N en utilisant ln(N - 30) = ak + b, soit N = 30 + e^(ak+b).

**Q : Pourquoi la probabilité d'obtenir exactement 15 pannes selon une loi de Poisson n'est-elle pas nulle ?**

La formule P(Y = k) = e^(-λ)λ^k/k! donne une valeur strictement positive pour tout entier k lorsque λ est positif. Le graphique peut seulement rendre cette valeur très petite ou difficile à distinguer de zéro.

**Q : Comment organiser le temps entre les deux exercices ?**

Les exercices valent chacun 10 points et l'épreuve dure 2 heures. Une répartition proche d'une heure par exercice est un repère utile, en gardant du temps pour vérifier les calculs, les unités et les arrondis.

**Q : Que faut-il vérifier pour décider si la machine est correctement réglée ?**

Il faut calculer la moyenne observée, déterminer l'intervalle d'acceptation du test bilatéral à 95 %, puis comparer la moyenne à cet intervalle. La conclusion doit préciser ce que les résultats indiquent sur le réglage de la machine.

**Sujet officiel associé (PDF) :** https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2022/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
**Ressources BTS Management Économique de la Construction :** Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.