Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MEC

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2023/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L'exercice étudie d'abord une équation différentielle associée à cette fermeture, puis les variations de f, un algorithme de seuil et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour l'équation du second degré, le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Comme $\Delta > 0$, il y a deux racines réelles distinctes. La formule $r = \frac{-5 \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ donne les deux valeurs recherchées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l'aide du tableau fourni, résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est celle résolue à la question précédente. Ses deux racines réelles distinctes sont -1 et -4. D'après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison linéaire des exponentielles correspondantes, avec deux constantes réelles arbitraires.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de −10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

La fonction f représente la distance OM, exprimée en centimètres. À l'instant initial, cette distance est de 20 cm, donc la valeur de la fonction est 20. La vitesse de déplacement vers le point O est indiquée comme négative et vaut $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$: c'est la valeur de la dérivée à l'instant initial.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. En utilisant l'expression donnée de f, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

La distance étant donnée par $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, on remplace simplement t par 2. On conserve les exponentielles dans l'expression afin de donner la valeur exacte demandée. La distance obtenue est exprimée en centimètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM = f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

La fonction est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. On calcule donc la distance à 4 secondes : $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,427$ cm. Cette distance est déjà inférieure au seuil de fermeture de 0,5 cm. Comme la distance diminue continûment, le seuil est atteint avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B

Question 1.a. En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

On a $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, chacune des exponentielles tend vers 0 d'après la limite rappelée dans le sujet. La combinaison des deux termes tend donc également vers 0.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est égale à 0. La courbe se rapproche donc de la droite horizontale d'équation $y = 0$ lorsque le temps augmente indéfiniment. Cette droite est l'asymptote horizontale de la courbe en $+\infty$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le facteur -1 apparaît pour la dérivée de e^{-t}, tandis que le facteur -4, combiné au coefficient $-\frac{10}{3}$, donne un terme positif. On obtient ainsi l'expression de f' sur tout l'intervalle considéré.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$, la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 0. Le tableau de variations traduit cette décroissance vers 0.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	0
Variation	$20 \searrow 0$	

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît de 20 à 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant f(t) arrondie au centième et la valeur de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque étape, t augmente de 0,1 et la condition testée est $f(t) > 0,5$. Les valeurs ci-dessous sont arrondies au centième, comme demandé. À $t = 3,8$, la condition est encore vraie; à $t = 3,9$, elle devient fausse et l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0,5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété

a. Recopier le tableau ci-dessous, au besoin en rajoutant des lignes, et compléter à partir de la ligne numéro 36 jusqu'à ce que l'algorithme s'arrête

ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	16,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	14,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....

36 3,6 0,64 VRAIE
37 3,7 0,58 VRAIE
38 3,8 0,52 VRAIE
39 3,9 0,47 FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

La dernière valeur testée est $t = 3,9$ s.

Question 3.b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

À $t = 3,8$, la distance vaut environ 0,52 cm et reste supérieure au seuil de 0,5 cm. À $t = 3,9$, elle vaut environ 0,47 cm : le test devient faux et l'algorithme s'arrête. L'algorithme avance par pas de 0,1 seconde; le premier instant testé où le tiroir répond au critère de fermeture est donc 3,9 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le tiroir est fermé à la première étape testée, pour $t = 3,9$ s.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer l'expression de m donnée dans le sujet.

Une primitive de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, en appliquant la définition de la moyenne et en évaluant entre 0 et 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right).$$

Le développement et la réduction donnent l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

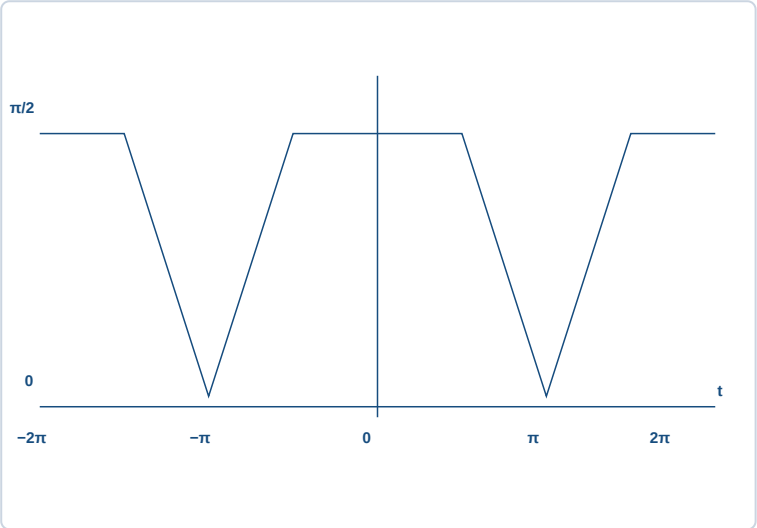
2. Série de Fourier d'une fonction paire périodique

On étudie une fonction paire, périodique de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. À partir des formules de Fourier fournies, l'exercice demande de tracer la fonction, de calculer ses coefficients et d'utiliser une somme partielle pour étudier une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de f sur l'intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition et de sa périodicité.

Sur chaque période de longueur 2π, la fonction vaut $\pi/2$ sur un intervalle de longueur π, centré sur un multiple de 2π. Elle décroît ou croît ensuite linéairement jusqu'à 0 aux multiples impairs de π. Le tracé respecte cette périodicité et la parité.

Représentation de f sur [−2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Le tracé demandé est une courbe paire et périodique de période 2π, avec des plateaux de hauteur $\pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Pour tout entier $n \geq 1$, f est paire et $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur $[-\pi;\pi]$ est nulle. Comme ce produit est périodique de période 2π, cette intégrale est celle sur une période complète utilisée pour calculer b_n.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, le coefficient de Fourier en sinus est nul : $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La formule du formulaire donne $\omega = \frac{2\pi}{T}$. La période étant $T = 2\pi$, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La pulsation associée à la période 2π est $\omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. Démontrer que le coefficient constant a_0 est égal à $3\pi/8$.

Sur $[0;\pi]$, l'aire sous la courbe est la somme d'un rectangle de côtés $\pi/2$ et $\pi/2$, et d'un triangle de base et de hauteur $\pi/2$. Elle vaut donc $\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{3\pi^2}{8}$. Par parité et périodicité, $a_0 = \frac{1}{2\pi} \times 2 \times \frac{3\pi^2}{8}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La moyenne de la fonction sur une période vaut exactement $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt) dt.

La fonction étant paire, le formulaire donne $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare à $t = \pi/2$, puis on remplace $f(t)$ par chacune de ses deux expressions.

✓ RÉPONSE À RETENIR

On obtient $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$, pour tout $n \geq 1$.

Question 6. À l'aide de l'expression donnée de a_n, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - \cos(n\pi)\right)$ aux trois premiers entiers. Les valeurs des cosinus donnent successivement $\frac{2}{\pi}(0-(-1))$, $\frac{1}{2\pi}(-1-1)$, puis $\frac{2}{9\pi}(0-(-1))$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Les coefficients exacts demandés sont $a_1 = \frac{2}{\pi}$, $a_2 = -\frac{1}{\pi}$ et $a_3 = \frac{2}{9\pi}$.

Question 7. Déduire des coefficients précédents l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ donnée dans le sujet.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n\cos(nt)$, car les coefficients b_n sont nuls. En y substituant a_0, a_1, a_2 et a_3, on obtient l'expression demandée.

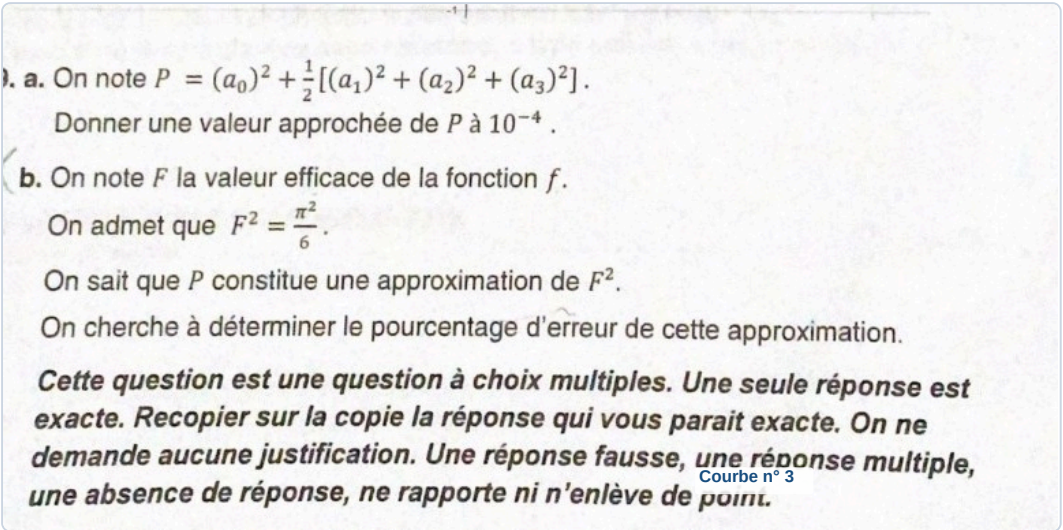
✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t)$.

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.**

La somme partielle présente un maximum près de $t = 0$ et des creux près de $t = \pm\pi$. Le tracé correspondant est le troisième.

Courbe associée à s_3



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe associée à s_3 est la courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + 1/2[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.**

Avec les coefficients exacts, $P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$. On évalue cette expression puis on arrondit au 10^{-4}.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À 10^{-4} près, la valeur de l'approximation est $P \approx 1{,}6437$.

Question 9.b. **Sachant que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, choisir le pourcentage d'erreur parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

Le taux d'erreur relatif est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les trois valeurs proposées, on retient donc la plus proche.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le choix à indiquer est $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, porte le code 23MATGRB2 et dure deux heures. Les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle étudie la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et analyse de fonction, puis les séries de Fourier d'une fonction paire périodique et l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les solutions se déterminent à partir des racines de l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La fonction f est décroissante sur un intervalle où sa dérivée est strictement négative.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n de la série de Fourier sont nuls.
- La pulsation d'une fonction périodique de période T est $\omega = 2\pi/T$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Associer correctement f(0) à la distance initiale et f'(0) à la vitesse, en respectant les unités.
- Pour l'asymptote horizontale, établir la limite de f(t) et donner l'équation de la droite correspondante.
- Dans la boucle, vérifier la condition à chaque pas de 0,1 et distinguer la dernière valeur testée de la valeur finale.
- Pour les questions de Fourier, respecter la définition par morceaux, la périodicité et les formules du formulaire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de la partie A ?

Résoudre d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale des solutions de l'équation différentielle. Les conditions initiales déterminent ensuite les constantes de la fonction qui modélise la distance.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls pour la fonction étudiée ?

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur une période centrée en zéro est nulle. Les coefficients sinus b_n sont ainsi nuls.

Q : Comment déterminer la valeur finale de t dans l'algorithme ?

Partir de t = 0 et ajouter 0,1 tant que la condition de la boucle est vraie. L'algorithme s'arrête dès qu'elle devient fausse. Interpréter alors la valeur obtenue comme le temps associé au franchissement du seuil défini.

Q : Que faut-il faire pour la question sur les trois courbes ?

Comparer les courbes proposées à la forme de la somme partielle $s_3(t)$, puis indiquer celle qui lui correspond. Le sujet demande de répondre sans justification. Pour la question 9.b, recopier une seule des trois réponses proposées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsmec.fr/assets/annales/bts-mec/E2 - Mathématiques/2023/BTS MEC - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS Management Économique de la Construction : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.